数理解析研究所講究録
858巻 1994年 91-105

Jones index and KK-theory

岡山大　梶原 毅
北大　綿谷 安男

1 はじめに

このノートの目的は，次の図式を完成することにある：

amenable	:	K-amenable
= finite index	:	$\boxed{\ ?\ }$

離散群Gがamenableである必要十分条件は，$C^*(G) \cong C^*_r(G)$ であり，一般には自然な写像

$$\pi : C^*(G) \longrightarrow C^*_r(G)$$

はontoな*homomorphismではあるが，1:1ではない。

Cuntz [2] は、上の *homomorphism $\pi : C^*(G) \longrightarrow C^*_r(G)$ が K-theory の level で同型の時に離散群 G は K-amenable とよんだ。例えば2つの生成元をもつ自由群 F_2 は amenable では無いが、K-amenable である。離散群だけではなく、一般の局所コンパクト群に対しても、Julg-Valette は K-amenable の概念を導入している[5]。

Jones [4] は II_1-factor M の subfactor $N \subset M$ に対してその Jones index $[M:N]$ という概念を導入して、inclusion $N \subset M$ そのものの研究が非常に豊かであることを示した。幸崎[6] や Longo [7] によって index の概念は III型を含む一般の subfactor にまで自然に拡張されている。この場合は index の定義に何の異論もない。しかし、C^*-環 B とその部分 C^*-alg $A \subset B$ においては index の定義が綿谷[8]によるものがあるが、それは factor の時のまねにすぎず、C^*-環に対する自然な最もよい定義であるとはとても信じられないものである。私たちのこの研究は「もう少しまし」なものをめざして、K-theory のレベルで有限 index であることを特徴づけられないかを考えようという1つの試みであるが、現在のところ定義のみで中味は貧しいと思う。

2 このノートでの key words の解釈

key words	誤まった解釈	正しい解釈
Index	Atiyah-Singer index	Jones index
square	C^2 commuting square	K^2 KK-theory
field theory	quantum field theory	number field theory
$\mathcal{O}_k$	Cuntz algebras	rings of algebraic integers of a field k
way 道 (方向)	right way map 正 道 写像 masa michi	wrong way map 誤 道 写像 (方向)

注 今までの理論では，KK-theory と結びつくのは Atiyah-Singer index の方であったのが ここではそれが Jones index と結びついていることに注意。

[3] Jones index for C^*-subalgebras

C^*-subalgebra に対する index [8] を思いだそう:

Def B を 1 をもつ C^*-alg, $A \subset B$ を B の C^*-subalg. $E : B \to A$ を conditional expectation とする. 有限コの組 $\{(u_1, u_1^*), \dots, (u_n, u_n^*)\} \subset B \times B$ が quasi-basis

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $\forall x \in B \quad x = \sum_{i=1}^{n} u_i E(u_i^* x)$

(この時 * をとって自動的に $x = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) u_i^*$ となる)

略して $\{u_1, \dots, u_n\}$ を E の "basis" ともいう.

conditional expectation E が of index-finite type

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ E が quasi-basis をもつ

この時, E の Index を次で定義する

$$\mathrm{Index}\, E = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$$

(注) ① Index E は quasi-basis のとり方によらない

② $\mathrm{Index}\, E \in \mathrm{Center}\, B$

③ II_1-factor の時は Jones の index に III 型の時は幸崎の index [6] に一致する。

④ factor の時と同様に C^*-環としての basic construction $C^*\langle B, e_A \rangle$ が構成できる。

綜合[8]では本質的にAF algebraの例しか構成できなくて、Hyperfinite factorの時の域を実質的に超えていなかったといえよう。ところが、泉[3]はCuntz環のC*-subalgebraでnon-integer値をindexにもつような極めて興味深いものを構成した。これは例自体もその構成方法も非常におもしろい。Sectorsのfusion ruleを利用したてのつくり方は泉[3]を参照することにして、ここではその結果できたいくつかの具体例だけを記す。

$\boxed{\text{例}}$ (Izumi [3])

① $\mathcal{O}_2 = C^*(S_1, S_2)$, $d = 2\cos\frac{\pi}{5}$

$$\begin{cases} \rho(S_1) = \frac{1}{d} S_1 + \frac{1}{\sqrt{d}} S_2 S_2 \\ \rho(S_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} S_1 - \frac{1}{d} S_2 S_2\right) S_2^* + S_2 S_1 S_1^* \end{cases}$$

できまる endomorphism $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_2)$ より conditional expectation $E_\rho(x) = \rho(S_1^* \rho(x) S_1)$ とおくと $\mathrm{Index}\, E_\rho = 4\cos^2\frac{\pi}{5}$

② $\mathcal{O}_3 = C^*(S_1, S_2, S_3)$, $a^3 = 1$, $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \rho_a(S_1) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_3 S_3}{\sqrt{2}} \\ \rho_a(S_2) = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_3 S_3}{\sqrt{2}}\right)(S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^*) \\ \rho_a(S_3) = \bar{a} \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + a S_3 (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*) \end{cases}$$

$E_{\rho_a}(x) = \rho(S_1^* \rho_a(x) S_1)$ とおくと $\mathrm{Index}\, E_{\rho_a} = 4$

$\boxed{4}$ Wrong way maps in K-theory

BをC*-algebra，AをBのC*-subalgebraで $i: A \hookrightarrow B$ を inclusion map とする。すると自然に

$$i_*: K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$$

や

$$i_*: K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$$

が導かれる。一般にはこの自然な方向の写像と反対方向の写像の存在は期待できない。ところが，もし conditional expectation $E: B \to A$ が of index-finite type ならこの反対方向の写像 "wrong way" map が K-theory のレベルで存在するのである。実際この時

$$\varphi: \begin{cases} A \longrightarrow C^*\langle B, e_A\rangle \\ \quad\;\, a \longmapsto a e_A \end{cases}$$

によって $\varphi_*: K_0(A) \longrightarrow K_0(C^*\langle B, e_A\rangle)$ は同型になっている（森田同値！）ので "wrong way" map

$$T_0: K_0(B) \longrightarrow K_0(A) \quad \text{は}$$

$j: B \hookrightarrow C^*\langle B, e_A\rangle$ を使って $T_0 := (\varphi_*)^{-1} \cdot j_*$ とし

定義できる。$T_1: K_1(B) \to K_1(A)$ も同様である。

以上のことは index が有限な部分群に対する
(co)homology の level での "wrong way" maps
である「transfer」の存在と類比的になって
いる。さらにこの時次の図式が成立している：

$$\boxed{\begin{array}{l}(\text{wrong way map})\circ(\text{natural map}) \\ = (\text{multiplication map by the index})\end{array}}$$

さて K-theory level での homomorphism は
"ほぼ" Kasparov の KK-theory の元といっても
よい。よって amenable を K-theory のレベルで
考えた Cuntz の K-amenable と同様に、of
index-finite type を K-theory のレベルで考え
たものが存在するかもしれない。それをうまく
定式化しようというのが目的である。また sector
の理論において、sector ρ に対して その conjugate
$\bar{\rho}$ を考えるが、ρ を natural map とすると $\bar{\rho}$ が
"wrong way" map に対応することになる。
以下ではさらに number field theory にでてくる "wrong
way" map を考察して比較してみたい。

[5] Wrong way maps in number field theory

F を number field, $L \supset F$ を F の有限次代数拡大とする。$n = [L:F]$ を拡大次数とおく。L の F 上の basis を $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ とすると, $a \in L$ において $n \times n$ 行列 $A(a) = (a_{ij})_{ij} \in M_n(F)$ over F が次できめられる

$$a w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

この時 trace map $Tr_{L/F} : L \to F$

と norm map $N_{L/F} : L \to F$

が次で定義される

$$Tr_{L/F}(a) = Tr(A(a))$$
$$N_{L/F}(a) = \det(A(a))$$

これらの2つの maps は K-theory の level でも存在し, inclusion $i : F \to L$ から定まる自然な写像 $i_* : K_*(F) \to K_*(L)$ に対する "wrong way" map
$$\begin{cases} N_0 : K_0(L) \to K_0(F) \\ N_1 : K_1(L) \to K_1(F) \end{cases}$$
と思ってもよい。実際
$$\begin{cases} K_0(L) \cong K_0(F) \cong \mathbb{Z} \text{ で } & N_0(k) = [L:F]k \\ K_1(L) = L \setminus \{0\},\ K_1(F) = F \setminus \{0\} \text{ で } & N_1(a) = N_{L/F}(a) \end{cases}$$
となっている。

この時 (wrong way map) $\circ$ (natural map)
$\quad = $ (multiplication map by the index)
に実際なっている：

$$N_0 \circ i_0 : \begin{cases} K_0(F) \longrightarrow K_0(F) \\ \quad \rotatebox{90}{$\in$} \\ \quad x \longmapsto [L:F]x \end{cases}$$

$$N_1 \circ i_1 : \begin{cases} K_1(F) \longrightarrow K_1(F) \\ \quad \rotatebox{90}{$\in$} \\ \quad x \longmapsto x^{[L:F]} \end{cases}$$

これらの "wrong way" maps N_0, N_1 はさらに高次の代数的K-理論のレベルでも導入されているが、著者自身よくわからないので初歩的なことでやめておく。

$\boxed{6}$ K-theoritic finiteness of index

ある種の"良い" wrong way map の存在が KK-theory の level で保証できる時に、K-theoritic に index が有限性であるとみなしてみよう：

$\boxed{\text{Def}}$ AとBを C^*-環とする。3つ組 (E, φ, F) が Kasparov A-B module とは

$\underset{\text{def}}{\iff}$
① Eは $\mathbb{Z}_2$-graded Hilbert B-module
② $\varphi : A \to \mathcal{L}(E)$ は degree 0 の *homomorphism
③ $F \in \mathcal{L}(E)$ は degree 1 の operator
④ $\forall a \in A$ $\quad \varphi(a)(F-F^*)$ も $\varphi(a)(F^2-1)$ も $[\varphi(a), F] \in K(E)$

Def Kasparov A-B module 全体 $\mathcal{E}(A,B)$ に直和 $\oplus$ を入れ，ある種の homotopy equivalence で割ったものが Kasparov group $KK(A,B)$ である。[くわしいことは[1]を参照。特に Kasparov product：

$$\otimes_D : KK(A,D)\times KK(D,B)\to KK(A,B)$$
$$(\alpha,\ \beta)\longmapsto \alpha\otimes_D\beta$$

が構成されることが重要である。subfactor の理論における Ocneanu の bimodule approach での relative tensor product に対応するのが C^*-algebra の index 理論における Kasparov product であると思われる。しかし Fredholm operator F の扱い方とも絡んでそれほど素直に翻訳できるわけでもなく大いに思案中の所である。一方

factor	:	number field
C^*-algebra	:	rings of algebraic integer

という荒っぽい類比が成立する徴候も実はいくつかあるので，それも眺めつつ，研究をゆっくりと進めている。概念ちがう確かなものがあるわけでもなくてかなり心もとない。

Subfactorの理論では非負行列のPerron－Frobeniusの定理に大変お世話になった。ここで行列はinclusion matrixからきている。C^*-環の世界ではこのinclusion matrixは一般にKK-groupの元とみてよい。そこでKK-groupの元にpositivityを導入する必要性がでてくる。

Def Kasparov A－B module $(E, \varphi, F) \in \mathcal{E}(A, B)$ が positive

$\overset{}{\underset{def}{\Leftrightarrow}}$ $\forall x \in K_0(A)_+ \quad x \underset{A}{\otimes} [E, \varphi, F] \in K_0(B)_+$

注① ここで $K_0(A) \cong KK(\mathbb{C}, A)$ とみなしていて、$\otimes_A$ は Kasparov product である。

② ここで $K_0(A)_+$ は $K_0(A)$ の中で $\bigcup_n M_n(A)$ の中の projection から本当に来ている元の生成する positive cone である。（場合により $K_0(A)_+ = K_0(A)$ になってしまう時もあるのは目をつぶる）

③ これと少し違ったpositivityの定義も候補として考えている。その可能性は残しておくが、とりあえずこのノートは簡単のためこの定義を使う。有限次元環 $A \subset B$ のinclusion matrixは positive な Kasparov A－B－module と思える。

$\boxed{\text{Def}}$ B を C^*-alg, $A \subset B$ を C^*-subalgebra とする.

$$\begin{cases} \rho = (B \oplus 0,\ \jmath \oplus 0,\ 0) \in \mathcal{E}(A, B)_+ \\ i_0 = (A \oplus 0,\ \jmath \oplus 0,\ 0) \in \mathcal{E}(A, A)_+ \end{cases} \quad \text{とおく}$$

ここで $\jmath : A \to \mathcal{L}(B)$ は left multiplication.

この時 inclusion $A \subset B$ が <u>K-theoritic に of finite index</u> とは

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \tau = (E, \pi, F) \in \mathcal{E}(B, A)_+$

$\exists\, \sigma = (E', \pi', F') \in \mathcal{E}(A, A)_+$

s.t. $[\rho] \otimes_B [\tau] = [i_0] \oplus [\sigma]$ in $KK(A, A)$

$\boxed{\text{Example 1}}$ conditional expectation $E : B \to A$ が of index-finite type ならば inclusion $A \subset B$ は K-theoritic に finite index である. 実際

$\tau \equiv (B_A \oplus 0,\ \jmath \oplus 0,\ 0) \in \mathcal{E}(B, A)_+$ とおく,

B は $(x|y) = E(x^* y)$ で A-valued 内積を入れたもの.

$$(\rho) \otimes_B (\tau) = [({}_A B_A \oplus 0,\ \jmath \oplus 0,\ 0)]$$

となっている.

Example 2 S_n を n文字上の対称群とする。inclusion $A = C^*(S_2) \subset B = C^*(S_3)$ は K-theoretic に finite index である。実際

$A \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \Rightarrow K_0(A) \cong \mathbb{Z}^2$

$B \cong \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \Rightarrow K_0(B) \cong \mathbb{Z}^3$

$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in KK(A, B)$ は $\underset{\mathbb{Z}^2}{K_0(A)} \to \underset{\mathbb{Z}^3}{K_0(B)}$ とみる

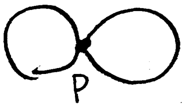
$[T] = [P]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in KK(B, A) : K_0(B) \to K_0(A)$ とみる

$[P] \otimes_B [T] = [P]^t [P]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ここで $[1_A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と思ってよい。

Example 3 (Branched covering)

$Y \cong$ 

, $X \cong$  で

covering $\pi : Y \to X$ に対応する inclusion $A = C(X) \hookrightarrow B = C(Y)$ は $E : B \to A$ が index-finite type ではない。これは点 P における分岐のためだが、しかし K-theoretic には finite index になっている。

$\boxed{\text{Example 4}}$ (product type action)

G : compact group

$\pi : G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$: irreducible rep.

$B = \bigotimes_{i=0}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$: M_{2^∞} 型の UHF alg

$\cup$

$A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$: 〃

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, B$ を π からきまる product type action とする. つまり $\alpha_g = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ad}\,\pi(g)$. $\alpha_g(A) = A$ なので α は A にも制限できて同じ記号を使う。この時 conditional expectation $E : B^\alpha \longrightarrow A^\alpha$ が自然に定まっている. 次は同値 :

① $E : B^\alpha \longrightarrow A^\alpha$ is of index-finite type

② (finite depth 条件) : irreducible components of $\{\pi, \pi\otimes\pi, \pi\otimes\pi\otimes\pi, \cdots\cdots\}$ は $\hat{G}$ の中の有限集合

さてここで自然におこる問題は たとえ $E : B^\alpha \to A^\alpha$ が C^*-環の意味で index-finite type でなくても K-theoretic には finite index ではないか? ということであるが、現段階では残念ながらまだ不明で考えている最中である.

白状　K-theoritic な finite index ということに関しては今のところ何も定理らしい定理はまだ何も無いことを白状します。

References

[1] B. Blackadar, K-theory for Operator algebras, Springer

[2] J. Cuntz, K-theoritic amenability for discrete groups, J. Reine. Angew. Math. 344 (1983), 180–195.

[3] M. Izumi, Subalgebras of infinite C^*-algebras with finite Watatani indices I, Cuntz algebras, Commun. Math. phys, 155 (1993), 157–182

[4] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25.

[5] P. Julg and A. Valette, K-theoritic amenability for $Sl_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree, J. Funct. Anal. 58 (1984), 194–215.

[6] H. Kosaki, Extension of Jones theory on index to arbitrary factors, J. Funct. Anal. 66, (1986), 123–140.

[7] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields I, Commun. Math. Phys. 126 (1989), 217–247.

[8] Y. Watatani, Index for C^*-subalgebras, Mem. Amer. Math. Soc. 83 (1990), No 424